Zadania z Algebry

Studia Doktoranckie Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

2008–2009

1. (a) Udowodnić, że jeśli grupa ilorazowa $G/Z(G)$ jest cykliczna, to grupa G jest abelowa ($Z(G)$ oznacza centrum grupy G).
(b) Udowodnić, że nie istnieje grupa G, której centrum jest podgrupą o indeksie 2 lub 3.

2. Dowieść, że istnieją tylko dwie nieizomorficzne grupy nieabelowe rzędu 8.

3. Dowieść, że każda grupa rzędu 15 jest cykliczna.

4. Niech A będzie grupą cykliczną rzędu n. Udowodnić, że dla każdego dzielnika d liczby n istnieje dokładnie jedna podgrupa grupy A rzędu d.

5. Dowieść, że każda skończona grupa abelowa, która nie jest grupą cykliczną, zawiera podgrupę H, która jest sumą prostą dwóch grup cyklicznych rzędu p, gdzie p jest pewną liczbą pierwszą.

6. Niech p będzie liczbą naturalną i niech $G \neq E$ będzie grupą, w której każdy $\neq 1$ element ma rząd będący potęgą liczby p. Udowodnić, że p jest liczbą pierwszą. Ponadto, jeśli grupa G jest skończona, to jej rząd jest potęgą liczby p.

7. Niech G będzie grupą skończoną i niech p będzie najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy G. Dowieść, że każda podgrupa H grupy G, której indeks $|G : H|$ jest równy p, jest podgrupą normalną grupy G.

8. Niech $n \geqslant 2$ i niech

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

będzie ciągiem dokładnym grup skończonych.
(a) Jeśli n jest liczbą parzystą, udowodnić, że $|A_1| \cdot |A_3| \cdots |A_{n-1}| = |A_2| \cdot |A_4| \cdots |A_n|$.
(b) Jeśli n jest liczbą nieparzystą, udowodnić, że $|A_1| \cdot |A_3| \cdots |A_n| = |A_2| \cdot |A_4| \cdots |A_{n-1}|$.

9. Pokazać, że grupa czwórkowa Kleina $G = V_4$ jest jedyną grupą G rzędu $\geqslant 4$, której grupa automorfizmów $\mathsf{Aut}\, G$ składa się z wszystkich bijekcji zbioru G pozostawiających jedynkę grupy G na miejscu.

10. Dla ciał kwadratowych $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}\,)$ oraz $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}\,)$ udowodnić, że
(a) Addytywne grupy ciał K i F są izomorficzne.
(b) Multyplikatywne grupy ciał K i F są izomorficzne.
(c) Ciała K i F nie są izomorficzne.

11. Udowodnić, że część wspólna wszystkich $p-$podgrup Sylowa grupy skończonej G jest podgrupą normalną grupy G.

12. Niech G będzie grupą rzędu 168. Udowodnić, że grupy G nie można zanurzyć w grupę symetryczną S_6. Pokazać, że jeśli grupa G jest prosta, to ma 8 podgrup rzędu 7 i można ją zanurzyć w grupę S_8.

13. Udowodnić, że każda grupa wolna jest beztorsyjna i jest nieabelowa jeśli jej ranga jest $\geqslant 2$.

14. Udowodnić, że grupa z kodem genetycznym

$$\mathrm{gr}(\,\{x_1, \ldots, x_n\}\,||\,x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

jest wolną grupą abelową rangi n (tzn. jest sumą prostą n grup cyklicznych nieskończonych).

15. Znaleźć kod genetyczny grupy czwórkowej Kleina $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

16. Niech $f \in \mathbb{Z}[X]$. Skończony ciąg różnych liczb całkowitych $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nazywamy $f-$cyklem o długości k, jeśli $f(x_0) = x_1, \quad f(x_1) = x_2, \quad \ldots, \quad f(x_{k-1}) = x_0$.
(a) Wskazać wielomiany f i g takie, że f ma cykl długości 1 i g ma cykl długości 2.
(b) Udowodnić, że wielomian $f \in \mathbb{Z}[X]$ nie może mieć cyklu o długości $\geqslant 3$.

17. Niech $f \in \mathbb{Q}[X]$. Udowodnić, że jeśli $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, to f jest wielomianem liniowym: $f = aX + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

18. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n wielomian $X^n + X + 3$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Q}[X]$.

19. Niech $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ i niech f będzie wielomianem unormowanym (najwyższy współczynnik równy 1). Udowodnić, że jeśli $f(n)$ dzieli $g(n)$ dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n, to f dzieli g w $\mathbb{Z}[X]$.

20. Udowodnić, że nie istnieje homomorfizm pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ na pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{3}\,]$.
Czy istnieje homomorfizm pierścienia wielomianów $\mathbb{Q}[X]$ na pierścień $\mathbb{Z}[X]$?

21. Znaleźć wszystkie ideały maksymalne pierścienia funkcji rzeczywistych ciągłych na odcinku $[0, 1]$.

22. Niech A będzie pierścieniem przemiennym i niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ będą ideałami w A.

(a) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = A$, to $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = A$.
(b) Dla $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ i $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ znaleźć ideał $\mathfrak{b}$ w A taki, że $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ jest ideałem głównym.
(c) Dla $A = \mathbb{Z}[fi]$, gdzie $f > 1$ jest liczbą naturalną oraz $i^2 = -1$, i dla $\mathfrak{a} = f\mathbb{Z}[i]$, sprawdzić, że $\mathfrak{a}$ jest ideałem w A i nie istnieje niezerowy ideał $\mathfrak{b}$ w A taki, że $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ jest ideałem głównym.

23. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym pierścienia przemiennego A.
(a) Udowodnić, że w zbiorze ideałów pierścienia A rozłącznych ze zbiorem S istnieje element maksymalny $\mathfrak{p}$.
(b) Udowodnić, że $\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym.

24. Niech A będzie pierścieniem przemiennym i niech Σ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów multyplikatywnych $S \subset A$.
(a) Zauważyć, że Σ jest zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację inkluzji. Udowodnić, że w Σ istnieje element maksymalny.
(b) Udowodnić, że zbiór $S \in \Sigma$ jest elementem maksymalnym w Σ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \backslash S$ jest minimalnym ideałem pierwszym pierścienia A.

25. Niech K będzie ciałem i niech $A = K[X]/(X^m)$. Udowodnić, że A jest pierścieniem lokalnym i jego jedyny ideał maksymalny jest ideałem głównym.

26. Udowodnić, że pierścień przemienny A jest pierścieniem lokalnym wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $a, b \in A$ z tego, że $a + b = 1$ wynika, że a jest elementem odwracalnym lub b jest elementem odwracalnym.

27. Niech A będzie pierścieniem przemiennym, który ma tylko skończoną liczbę n dzielników zera. Udowodnić, że A jest pierścieniem skończonym i ma co najwyżej $(n+1)^2$ elementów.

Wskazówka. Niech $0 \neq a \in A$ będzie dzielnikiem zera i niech J będzie anihilatorem elementu a. Udowodnić, że $|J| \leqslant n + 1$ oraz $|A/J| \leqslant n + 1$.

28. Niech R będzie pierścieniem (niekoniecznie przemiennym), w którym każda podgrupa addytywnej grupy pierścienia jest ideałem pierścienia R. Udowodnić, że pierścień R jest izomorficzny bądź z pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ bądź z pewnym pierścieniem reszt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

29. Niech M będzie $A-$modułem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.
(a) Istnieją podmoduły $M_1, \dots, M_n$ modułu M takie, że $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.
(b) Istnieją endomorfizmy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ modułu M takie, że $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = \mathbf{1}_M, \quad \varphi_i \circ \varphi_j = 0$ dla $i \neq j$ oraz $\varphi_i \circ \varphi_i = \varphi_i$ dla $i, j = 1, \dots, n$.

30. Niech A będzie pierścieniem przemiennym i niech $a, b \in A$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

(a) $A = aA \oplus bA$ (suma prosta $A-$modułów).
(b) $ab = 0$ i istnieją $x, y \in A$ takie, że $ax + by = 1$.
(c) $ab = 0$ oraz $a + b$ jest elementem odwracalnym pierścienia A.

31. Niech $J = (X, Y) = A \cdot X + A \cdot Y$ będzie ideałem w pierścieniu $A = K[X, Y]$ wielomianów dwóch zmiennych X, Y nad ciałem K. Udowodnić, że J nie jest wolnym podmodułem $A-$modułu wolnego A.

32. Niech $R = M_2(\mathbf{R})$ będzie pierścieniem macierzy 2×2 nad ciałem $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych i niech

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \in R : \ x, y \in \mathbf{R} \right\}.$$

Sprawdzić, że

(a) I jest ideałem lewostronnym pierścienia R.
(b) I jest projektywnym $R-$modułem.
(c) I nie jest wolnym $R-$modułem.

33. Niech P będzie $R-$modułem projektywnym. Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $p \in P$ istnieje funkcjonał liniowy φ na P taki, że $\varphi(p) \neq 0$.

34. Udowodnić, że jeśli P jest podmodułem $R-$modułu wolnego, to dla każdego niezerowego elementu $p \in P$ istnieje funkcjonał liniowy $\alpha : P \to R$ taki, że $\alpha(p) \neq 0$.

35. Niech A będzie podpierścieniem ciała K różnym od K i niech K będzie ciałem ułamków pierścienia A. Traktując K jako $A-$moduł udowodnić, że
(a) $\mathrm{Hom}_A(K, A) = 0$ (nie istnieją niezerowe funkcjonały liniowe na $A-$module K),
(b) K nie jest projektywnym $A-$modułem.

36. Niech F będzie grupą abelową wolną z bazą $\{f_1, ..., f_n\}$ i niech

$$h_i = a_{ii} f_i + \cdots + a_{in} f_n, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad a_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Niech $H = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ będzie podgrupą grupy F generowaną przez elementy $h_1, \dots, h_n$. Udowodnić, że indeks $|F : H|$ podgrupy H w grupie F można obliczyć następująco:

$$|F : H| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

37. Niech $\{f_1, \dots, f_n\}$ będzie bazą grupy abelowej wolnej F i niech $a_1, \dots, a_n$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że

$$F / \langle a_1 f_1, \dots, a_n f_n \rangle \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}.$$

38. Udowodnić, że dla dowolnych skończonych grup abelowych A, B, C zachodzi następujące *prawo skracania*:

$$A \times B \cong A \times C \ \Rightarrow \ B \cong C.$$

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności przedstawienia skończonej grupy abelowej w postaci sumy prostej $p-$grup abelowych.

39. Niech I oraz J będą ideałami pierścienia przemiennego A.
(a) Udowodnić, że jeśli $A-$moduły A/I oraz A/J są izomorficzne, to $I = J$.
(b) Pokazać na przykładzie, że pierścienie A/I oraz A/J są izomorficzne, ale $I \neq J$.

40. Udowodnić, że pierścień przemienny A jest pierścieniem całkowitym wtedy i tylko wtedy gdy ma następującą własność:
Dla każdego skończonego układu $m_1, \ldots, m_r \in M$, jeśli $m_1, \ldots, m_r$ są liniowo niezależne, to także $am_1, \ldots, am_r$ są liniowo niezależne dla każdego niezerowego $a \in A$.

41. Udowodnić, że jeśli nad pierścieniem przemiennym A każdy skończenie generowany $A-$moduł jest wolny, to A jest ciałem.

42. Niech M, N będą $R-$modułami i niech $S < M$ oraz $T < N$. Udowodnić, że

$$\frac{M \oplus N}{S \oplus T} \cong \frac{M}{S} \oplus \frac{N}{T}.$$

(Ułamki oznaczają moduły ilorazowe, $\oplus$ oznacza zewnętrzną sumę prostą (iloczyn kartezjański)).

43. Niech f będzie morfizmem w kategorii pierścieni przemiennych. Udowodnić, że
(a) f jest injektywnym homomorfizmem pierścieni wtedy i tylko wtedy, gdy f jest kategoryjnym monomorfizmem.
(b) Jeśli f jest surjektywnym homomorfizmem pierścieni, to f jest kategoryjnym epimorfizmem.

44. Niech f będzie morfizmem w kategorii modułów. Udowodnić, że
(a) f jest injektywnym homomorfizmem modułów wtedy i tylko wtedy, gdy f jest kategoryjnym monomorfizmem.
(b) f jest surjektywnym homomorfizmem modułów wtedy i tylko wtedy, gdy f jest kategoryjnym epimorfizmem.

45. (a) Udowodnić, że w kategorii zbiorów morfizm jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest odwzorowaniem injektywnym.
(b) Udowodnić, że w kategorii zbiorów morfizm jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest odwzorowaniem surjektywnym.

46. (a) Udowodnić, że w kategorii grup morfizm jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest homomorfizmem injektywnym.
(b) Udowodnić, że w kategorii grup morfizm jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest homomorfizmem surjektywnym.

47. Udowodnić, że w kategorii torsyjnych grup abelowych istnieją nieskończone iloczyny proste (produkty).

48. Określić kategorie (poprzez wskazanie obiektów i morfizmów), w których następujące obiekty są obiektami początkowymi:
(a) grupa ilorazowa, pierścień ilorazowy, moduł ilorazowy;
(b) grupa wolna $F(X)$ z wolnym zbiorem generatorów X;
(c) pierścień ułamków $S^{-1}P$ względem zbioru multyplikatywnego S;
(d) $A-$moduł wolny z bazą $\mathcal{B}$;
(e) iloczyn tensorowy modułów $M \otimes N$.

49. Niech A będzie pierścieniem noetherowskim i niech $\varphi : A \to A$ będzie homomorfizmem pierścieni. Udowodnić, że jeśli φ jest epimorfizmem, to φ jest izomorfizmem.

Wskazówka. $\ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2 \subseteq \cdots$.

50. Niech A będzie pierścieniem noetherowskim. Pokazać, że dla każdego ideału $\mathfrak{a}$ pierścienia A istnieje liczba naturalna m taka, że

$$(\mathsf{rad}\,\mathfrak{a})^m \subseteq \mathfrak{a}.$$

Wywnioskować stąd dwa następujące stwierdzenia:

(a) W pierścieniu noetherowskim A nilradykał jest ideałem nilpotentnym, to znaczy, istnieje liczba naturalna m taka, że $(\mathsf{Nil}\,A)^m = (0)$.
(b) Jeśli $\mathfrak{q}$ jest $\mathfrak{p}-$prymarnym ideałem w pierścieniu noetherowskim A, to istnieje taka liczba naturalna m, że $\mathfrak{p}^m \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

51. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech f będzie unormowanym wielomianem nierozkładalnym pierścienia $\mathbb{Z}[X]$ stopnia $n \geqslant 1$. Niech $\bar{f}$ oznacza wielomian pierścienia $\mathbb{Z}_p[X]$, który powstaje z f przez zastąpienie każdego współczynnika jego resztą modulo p.
(a) Sprawdzić, że (p) i (f) są ideałami pierwszymi w $\mathbb{Z}[X]$ oraz dla każdej liczby naturalnej m ideały $(p)^m$ i $(f)^m$ są prymarne w $\mathbb{Z}[X]$.
(b) Sprawdzić, że jeśli $\bar{f}$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}_p[X]$, to $\mathfrak{p} = (p) + (f) = (p, f)$ jest ideałem maksymalnym w $\mathbb{Z}[X]$ i wyznaczyć liczbę elementów ciała $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}$.

52. Udowodnić, że wielomian $f = X^4 + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X]$ ale $\bar{f}$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdej liczby pierwszej p.

53. Pokazać, że w pierścieniu $\mathbf{Z}[X]$ ideał $\mathfrak{q} = (4, X)$ jest prymarny, ale nie jest potęgą ideału pierwszego.

54. Niech $A = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_1 \equiv 0 \pmod 3\}$.

(a) Pokazać, że w pierścieniu A ideał $\mathfrak{p} = (3X, X^2, X^3)$ jest ideałem pierwszym.
(b) Pokazać, że $\mathfrak{p}^2$ nie jest ideałem prymarnym.

Wskazówka. (b) Rozpatrzyć wielomian $9X^2$.

55. Niech $\mathfrak{q} = (2, X)^2 = (4, 2X, X^2)$ będzie ideałem w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$.

(a) Sprawdzić, że $\mathfrak{q}$ jest ideałem prymarnym.
(b) Sprawdzić, że $\mathfrak{q} = (4, X) \cap (2, X^2)$.
Ideał $\mathfrak{q}$ jest więc ideałem prymarnym w pierścieniu noetherowskim, ale nie jest nieprzywiedlny.

56. Niech A będzie pierścieniem całkowitym i niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym w A. Udowodnić następujące stwierdzenia.
(a) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierścienia ułamków AS^{-1} oraz $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap A$, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem w A oraz $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}S^{-1}$.
(b) Jeśli A jest pierścieniem noetherowskim, to AS^{-1} jest także pierścieniem noetherowskim.

57. Niech A będzie pierścieniem całkowitym i niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym w A. Udowodnić następujące stwierdzenia.
(a) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierwszym pierścienia AS^{-1} oraz $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap A$, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem pierwszym w A oraz $\mathfrak{a} \subseteq A \setminus S$.
(b) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierścienia AS^{-1} oraz $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap A$ jest ideałem pierwszym w A takim, że $\mathfrak{a} \subseteq A \setminus S$, to $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierwszym w AS^{-1}.
(c) Jeśli w pierścieniu A każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny, to także w pierścieniu AS^{-1} każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny.

58. Niech A będzie pierścieniem całkowitym i niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym w A. Udowodnić, że jeśli pierścień A jest integralnie domknięty, to pierścień ułamków AS^{-1} jest także integralnie domknięty.

Uwaga. Zadania **56**, **57**, **58** pokazują, że jeśli A jest pierścieniem Dedekinda i S jest dowolnym podzbiorem multyplikatywnym w A, to także pierścień ułamków AS^{-1} jest pierścieniem Dedekinda.

59. Niech $A \subseteq K^n$ oraz $B \subseteq K^m$ będą zbiorami algebraicznymi. Udowodnić, że produkt kartezjański $A \times B \subseteq K^{n+m}$ jest także zbiorem algebraicznym.

60. Dla dowolnych zbiorów algebraicznych $A_1, \ldots, A_n$ udowodnić, że

$$\mathcal{I}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{I}(A_i).$$

61. Udowodnić, że każdy podzbiór domknięty w topologii Zariskiego przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest domknięty w naturalnej topologii tej przestrzeni.

62. Niech $f, g \in K[X, Y]$ gdzie K jest ciałem algebraicznie domkniętym. Udowodnić, że krzywe algebraiczne wyznaczone przez wielomiany f i g są równe (tzn. $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$) wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby naturalne n, m takie, że $f \mid g^n, \quad g \mid f^m$.
Zauważyć, że warunek ten jest równoważny temu, że f i g mają te same czynniki nierozkładalne nad K.

63. Niech $f \in K[X, Y]$ gdzie K jest ciałem algebraicznie domkniętym i niech $f = f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$ będzie kanonicznym rozkładem wielomianu f na czynniki nierozkładalne nad ciałem K. Udowodnić, że
(a) $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f_1) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(f_r)$ jest rozkładem zbioru algebraicznego $\mathcal{Z}(f)$ na sumę mnogościową rozmaitości.
(b) $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(f)) = (f_1 \cdots f_r)$.

64. Udowodnić, że każdy właściwy ideał radykalny jest przekrojem zawierających go ideałów pierwszych.

Wskazówka. Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem radykalnym oraz $a \notin \mathfrak{a}$, to zbiór multyplikatywny $S = \{1, a, a^2, \ldots\}$ jest rozłączny z ideałem $\mathfrak{a}$. Rozpatrzyć ideał maksymalny w rodzinie ideałów zawierających $\mathfrak{a}$ i rozłącznych ze zbiorem S.

65. Niech $\mathsf{Spec}\, A$ będzie zbiorem wszystkich ideałów pierwszych pierścienia przemiennego A. Dla każdego ideału $\mathfrak{a} \lhd A$ definiujemy $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\, A : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$.
Udowodnić, że dla ideałów $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ mamy

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}),$$

oraz dla każdej rodziny $\{\mathfrak{a}_i : i \in T\}$ ideałów pierścienia A mamy

$$\bigcap_{i \in T} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in T} \mathfrak{a}_i).$$

Wywnioskować stąd, że na spektrum $\mathsf{Spec}\, A$ istnieje topologia, w której zbiorami domkniętymi są zbiory $V(\mathfrak{a})$ dla $\mathfrak{a} \lhd A$ (topologia Zariskiego na spektrum pierwszym pierścienia A).

66. Udowodnić, że $\mathsf{Spec}\, A$ jest zwartą przestrzenią topologiczną (z każdego pokrycia $\mathsf{Spec}\, A$ zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone).

67. Udowodnić, że jeśli $\mathsf{Spec}\, A$ jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych, to istnieje element idempotentny $e \in A$ różny od 0 i 1.

Wskazówka. Jeśli $\mathsf{Spec}\, A = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ i $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ oraz $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathsf{Nil}\, A$.

W zadaniach **68** – **88** zakładamy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K, chyba, że w zadaniu jest inne założenie o V.

68. Niech V będzie przestrzenią wektorową z bazą $\{v_1, \ldots, v_n\}$ i niech τ będzie endomorfizmem przestrzeni V takim, że

$$\tau(v_1) = v_2, \quad \tau(v_2) = v_3, \ldots, \tau(v_{n-1}) = v_n, \quad \tau(v_n) = -a_n v_1 - a_{n-1} v_2 - \cdots - a_1 v_n.$$

(a) Udowodnić, że $f(\tau) = 0 \in \mathsf{End}_K V$ dla wielomianu

$$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in K[X].$$

(b) Udowodnić, że f jest wielomianem minimalnym endomorfizmu τ.

69. (a) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Udowodnić, że nie istnieją endomorfizmy σ i τ przestrzeni V takie, że

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \mathbf{1}_V.$$

(b) Niech K będzie ciałem o charakterystyce 2 i niech V będzie 2-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Wskazać endomorfizmy σ i τ przestrzeni V takie, że

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \mathbf{1}_V.$$

(c) Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $V = K[X]$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów nad K. Niech σ będzie endomorfizmem różniczkowania względem X, natomiast τ niech będzie endomorfizmem mnożenia wielomianu przez X. Sprawdzić, że

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \mathbf{1}_V.$$

70. Niech $\sigma, \tau \in \mathsf{End}_K V$. Załóżmy, że $\sigma\tau = \tau\sigma$ i endomorfizmy σ, τ są diagonalizowalne. Udowodnić, że istnieje baza przestrzeni V, w której każdy z endomorfizmów σ, τ ma macierz diagonalną.

71. Udowodnić, że jeśli $\tau \neq 0_V$ jest osobliwym endomorfizmem przestrzeni V, to istnieje endomorfizm σ przestrzeni V taki, że $\sigma \cdot \tau = 0_V$ ale $\tau \cdot \sigma \neq 0_V$.

72. Udowodnić, że każdy endomorfizm przestrzeni wektorowej V nad ciałem o charakterystyce $\neq 2$ można przedstawić w postaci sumy endomorfizmów odwracalnych.

73. Niech V będzie przestrzenią nieskończenie wymiarową i niech $\tau \in \mathsf{End}_K V$ będzie endomorfizmem jednoznacznie lewostronnie odwracalnym (to znaczy, istnieje dokładnie jeden endomorfizm $\sigma \in \mathsf{End}_K V$ taki, że $\sigma\tau = 1_V$). Udowodnić, że τ jest endomorfizmem odwracalnym.

74. Niech $\mathcal{T}$ będzie przemiennym podzbiorem algebry endomorfizmów przestrzeni wektorowej V, to znaczy $\tau\sigma = \sigma\tau$ dla każdych $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$. Dowieść, że jeśli wielomian minimalny każdego endomorfizmu $\tau \in \mathcal{T}$ rozkłada się na czynniki liniowe w ciele K, to istnieje wspólny wektor własny dla wszystkich endomorfizmów zbioru $\mathcal{T}$ (to znaczy taki wektor $v \in V$, że $v \neq 0$ oraz dla każdego $\tau \in \mathcal{T}$ mamy $\tau(v) \in Kv$).

75. Niech $A, B \in M_n(K)$ będą macierzami idempotentnymi, to znaczy, $A^2 = A$ oraz $B^2 = B$. Udowodnić, że macierze A i B są podobne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe rzędy.

76. Niech $\operatorname{char} K \neq 2$. Udowodnić, że jeśli endomorfizm τ przestrzeni V spełnia tożsamość $\tau^3 = \tau$, to istnieją podprzestrzenie U, W, Z przestrzeni V takie, że
(a) $V = U \oplus W \oplus Z$
(b) $\tau(u) = 0$ dla $u \in U$,
(c) $\tau(w) = w$ dla $w \in W$,
(d) $\tau(z) = -z$ dla $z \in Z$.

77. Niech σ i τ będą endomorfizmami przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Udowodnić, że jeśli $\sigma^2 = \tau^2 = \mathbf{1}_V$, to przestrzeń V zawiera podprzestrzeń U o wymiarze 1 lub 2, która jest podprzestrzenią niezmienniczą obydwu endomorfizmów σ i τ.

78. Udowodnić, że jeśli σ jest endomorfizmem nilpotentnym oraz $f \in K[X]$ jest dowolnym wielomianem takim, że $f(0) \neq 0$, to endomorfizm $f(\sigma)$ jest odwracalny.

79. Niech V będzie przestrzenią $\tau-$cykliczną. Udowodnić, że każdy endomorfizm σ przestrzeni V przemienny z τ ma postać $\sigma = f(\tau)$, gdzie $f \in K[X]$.

81. Niech $\rho, \tau \in \mathsf{End}_K V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) $V_\rho \cong V_\tau$ (izomorfizm $K[X]-$modułów).
(b) ρ i τ są podobne.

82. Niech $f \in K[X]$ będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 1$ i niech $S(f)$ będzie macierzą *stowarzyszoną* z wielomianem f.

(a) Udowodnić, że $f(S(f)) = 0 \in M_n(K)$.
(b) Udowodnić, że f jest wielomianem minimalnym macierzy $S(f) \in M_n(K)$.

83. Pokazać, że jeśli macierze rzeczywiste A i B są podobne nad ciałem liczb zespolonych, to są także podobne nad ciałem liczb rzeczywistych.

84. Niech $\rho, \tau \in \mathsf{End}_K V$.
(a) Udowodnić, że endomorfizmy $\rho\tau$ i $\tau\rho$ mają te same wartości własne.
(b) Udowodnić, że jeśli ρ i τ mają wektory własne i $\rho\tau = \tau\rho$, to ρ i τ mają wspólny wektor własny.

85. Udowodnić, że nad ciałem algebraicznie domkniętym K każda macierz $A \in M_n(K)$ jest podobna do macierzy transponowanej A^T.

86. Niech ρ i τ będą endomorfizmami przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Udowodnić, że jeśli $\rho^2 = \tau^2 = 1_V$, to przestrzeń V zawiera podprzestrzeń U o wymiarze 1 lub 2, która jest podprzestrzenią niezmienniczą obydwu endomorfizmów ρ i τ.

87. Niech K będzie ciałem o charakterystyce $\neq 2$.
(a) Jeśli $\sigma \in \mathsf{End}_K V$ jest endomorfizmem nilpotentnym, to istnieje taki endomorfizm $\rho \in \mathsf{End}_K V$, że $1_V + \sigma = \rho^2$.
(b) Jeśli w ciele K każdy element jest kwadratem ($K = K^2$), to dla każdego endomorfizmu odwracalnego $\tau \in \mathsf{End}_K V$ istnieje taki endomorfizm $\rho \in \mathsf{End}_K V$, że $\tau = \rho^2$.

Wskazówka. (a) Jeśli $\sigma^m = 0_V$, to $\rho = 1_V + x_1\sigma + \cdots + x_{m-1}\sigma^{m-1}$ dla odpowiednio dobranych $x_1, \ldots, x_{m-1} \in K$.
(b) Wykorzystać (a) i twierdzenie o rozkładzie.

88. Niech wielomian minimalny p_τ endomorfizmu τ przestrzeni V ma stopień równy wymiarowi przestrzeni: $\deg p_\tau = \dim V$. Udowodnić, że
(a) Moduł V_τ jest cykliczny.
(b) Każdy endomorfizm ρ przestrzeni V przemienny z τ ma postać $\rho = f(\tau)$, gdzie $f \in K[X]$.