

Algebra  
Wykłady dla Studiów Doktoranckich  
2008–2009

Kazimierz Szyciek

# Spis treści

<b>Przedmowa</b>	<b>v</b>
<b>1 Grupy</b>	<b>1</b>
1.1 Grupy, podgrupy, homomorfizmy	1
1.1.1 Definicja i przykłady grup	1
1.1.2 Podgrupy i warstwy	2
1.1.3 Podgrupy normalne	3
1.1.4 Homomorfizmy	4
1.1.5 Automorfizmy wewnętrzne	7
1.1.6 Twierdzenie Jordana-Höldera	8
1.2 Działanie grupy na zbiorze	9
1.2.1 Działanie grupy przez automorfizmy wewnętrzne	11
1.2.2 Zastosowania w teorii grup skończonych	12
1.3 Iloczyn prosty i półprosty grup	13
1.3.1 Iloczyn wewnętrzny	13
1.3.2 Iloczyn zewnętrzny	14
Iloczyn prosty	14
Iloczyn półprosty	16
1.3.3 Holomorf grupy	17
1.4 Grupy wolne i kody genetyczne grup	18
1.4.1 Monoidy wolne	19
1.4.2 Grupy wolne	19
1.4.3 Własność uniwersalna grupy wolnej	21
1.4.4 Kod genetyczny grupy	22
<b>2 Pierścienie</b>	<b>27</b>
2.1 Podstawowe pojęcia	27
2.2 Homomorfizmy i ideały	29
2.3 Ideały w pierścieniach przemiennych	32
2.3.1 Ideały pierwsze i maksymalne	33
2.3.2 Rozszerzenie i zwężenie ideału	34
2.3.3 Twierdzenie chińskie o resztach	35
2.3.4 Elementy nilpotentne i dzielniki zera	36
2.4 Pierścienie ułamków i lokalizacja	38
2.4.1 Konstrukcja	39
2.4.2 Własność uniwersalna	41
2.4.3 Ideały pierścienia ułamków	42
<b>3 Moduły</b>	<b>43</b>
3.1 Definicje i przykłady	43
3.1.1 Operacje na modułach	46
3.2 Homomorfizmy modułów	46
3.2.1 Rozszczepialne ciągi dokładne	47
3.3 Moduły wolne	50
3.4 Moduły projektywne	54

3.4.1	Bazy dualne modułów projektywnych . . . . .	56
3.4.2	Moduły projektywne nad pierścieniami lokalnymi . . . . .	58
3.5	Bimoduły i reprezentacje pierścieni . . . . .	60
3.6	Iloczyn tensorowy modułów . . . . .	61
3.6.1	Rozszerzenie pierścienia skalarów . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Moduły nad pierścieniami ideałów głównych</b>	<b>67</b>
4.1	Moduły torsyjne . . . . .	67
4.2	Moduły skończenie generowane . . . . .	70
4.3	Grupy abelowe . . . . .	73
4.3.1	Grupy abelowe wolne . . . . .	73
	Grupa abelowa wolna jako składnik prosty grupy abelowej . . . . .	74
	Generatory i relacje . . . . .	75
4.3.2	Skończenie generowane grupy abelowe . . . . .	76
4.3.3	Skończenie generowane beztorsyjne grupy abelowe . . . . .	76
4.3.4	Skończenie generowane mieszane grupy abelowe . . . . .	77
4.3.5	Torsyjne grupy abelowe . . . . .	77
4.3.6	Skończone grupy abelowe . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Kategorie</b>	<b>77</b>
5.1	Obiekty i morfizmy . . . . .	77
5.1.1	Monomorfizmy i epimorfizmy . . . . .	80
5.2	Iloczyny obiektów kategorii . . . . .	81
5.3	Sumy obiektów kategorii . . . . .	84
5.4	Funktory . . . . .	87
5.4.1	Transformacja naturalna funktorów . . . . .	89
5.4.2	Naturalna równoważność funktorów . . . . .	91
5.4.3	Funktory sprzężone . . . . .	93
5.5	Funktor $K_0$ . . . . .	94
5.5.1	Grupa Grothendiecka . . . . .	94
5.5.2	Funktor $K_0$ . . . . .	97
5.5.3	$K$ -teoria . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Pierścienie noetherowskie</b>	<b>99</b>
6.1	Moduły i pierścienie noetherowskie . . . . .	99
6.1.1	Moduły noetherowskie . . . . .	99
6.1.2	Pierścienie noetherowskie . . . . .	101
6.1.3	Moduły i pierścienie artinowskie . . . . .	105
6.2	Rozkład prymarny . . . . .	105
6.2.1	Radykał ideału . . . . .	108
6.2.2	Nota bibliograficzna . . . . .	110
6.3	Pierścienie Dedekinda . . . . .	110
6.3.1	Wymiar pierścienia . . . . .	111
6.3.2	Elementy całkowite nad pierścieniem . . . . .	111
6.3.3	Pierścienie Dedekinda . . . . .	113
6.3.4	Inna charakteryzacja pierścieni Dedekinda . . . . .	115
6.4	Pierścienie liczb algebraicznych całkowitych . . . . .	116
<b>7</b>	<b>Afiniczne rozmaitości algebraiczne</b>	<b>121</b>
7.1	Zbiory algebraiczne i ich ideały . . . . .	121
7.2	Topologia Zariskiego . . . . .	124
7.3	Rozmaitości algebraiczne . . . . .	126
7.4	Twierdzenie Hilberta o zerach . . . . .	128
7.5	Zastosowania twierdzenia Hilberta o zerach . . . . .	131
7.5.1	Rozkład prymarny ideałów i rozkład zbioru algebraicznego na sumę rozmaitości	132
7.5.2	Ideały maksymalne pierścienia wielomianów . . . . .	132
7.5.3	Ideały radykalne . . . . .	134

7.6	Ciało funkcji wymiernych na rozmaitości . . . . .	135
7.6.1	Pierścień funkcji wielomianowych na zbiorze algebraicznym . . . . .	136
7.6.2	Kategoria afinicznych zbiorów algebraicznych . . . . .	138
7.6.3	Zbiory algebraiczne określone nad podciałem . . . . .	139
7.6.4	Punkty $K$ -wymierne . . . . .	140
7.6.5	Ciało funkcji wymiernych na rozmaitości . . . . .	140
7.6.6	Wymiar rozmaitości . . . . .	141
7.6.7	Nieosobliwość rozmaitości . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Algebra endomorfizmów</b>	<b>145</b>
8.1	$K$ -algebry: definicje i przykłady . . . . .	145
8.2	Algebry z dzieleniem i algebry proste . . . . .	149
8.3	Centralność i prostota algebry endomorfizmów . . . . .	151
8.4	Wielomian minimalny endomorfizmu . . . . .	154
8.5	Endomorfizmy odwracalne . . . . .	156
8.6	Rząd endomorfizmu . . . . .	158
8.7	Podobieństwo endomorfizmów . . . . .	159
<b>9</b>	<b>Algebra liniowa:</b>	
	<b>Triangularyzacja i diagonalizacja</b>	<b>163</b>
9.1	Wartości własne endomorfizmu . . . . .	163
9.2	Endomorfizmy diagonalizowalne . . . . .	166
9.3	Postać kanoniczna trójkątna . . . . .	167
9.4	Diagonalizacja . . . . .	170
<b>10</b>	<b>Algebra liniowa: Postacie kanoniczne</b>	<b>173</b>
10.1	Struktura $K[X]$ -modułu $V_\tau$ . . . . .	173
10.1.1	Rozkład prymarny modułu $V_\tau$ . . . . .	174
10.1.2	Rozkład modułu $V_\tau$ na sumę prostą podmodułów cyklicznych . . . . .	177
10.2	Endomorfizmy nilpotentne . . . . .	179
10.2.1	Postać kanoniczna Jordana . . . . .	179
10.2.2	Jednoznaczność postaci kanonicznej Jordana . . . . .	181
10.3	Postać kanoniczna Jordana . . . . .	182
10.3.1	Postać kanoniczna . . . . .	183
10.3.2	Jednoznaczność postaci kanonicznej . . . . .	185
10.4	Wielomian charakterystyczny, wyznacznik, ślad . . . . .	187
10.4.1	Wielomian charakterystyczny . . . . .	187
10.4.2	Wyznacznik endomorfizmu . . . . .	189
10.4.3	Wyznacznik macierzy . . . . .	189
10.4.4	Ślad endomorfizmu . . . . .	190
10.5	Postać kanoniczna Frobeniusa . . . . .	191
10.5.1	Podprzestrzeń cykliczna . . . . .	191
10.5.2	Postać kanoniczna wymierna . . . . .	192
10.5.3	Jednoznaczność postaci kanonicznej . . . . .	194
10.6	Rozmaitości o endomorfizmach . . . . .	195
10.6.1	Podobieństwo przy zważaniu ciała . . . . .	195
10.6.2	Charakteryzacja endomorfizmów nilpotentnych . . . . .	195
10.6.3	Transponowanie macierzy . . . . .	195



# Przedmowa

Sometimes one has to say difficult things,  
but one ought to say them as simply as one knows how.

G. H. Hardy

Program studiów doktoranckich w Uniwersytecie Śląskim przewiduje wykłady z czterech podstawowych dyscyplin matematycznych. Wykłady te są adresowane do wszystkich uczestników studiów doktoranckich i mają ustanowić pewien minimalny standard wykształcenia matematycznego wszystkich doktorów, niezależnie od ich specjalizacji naukowej. W związku z tym programy tych wykładów przewidują jedynie hasła o ogólnym znaczeniu i unikają problematyki ważnej jedynie dla specjalistów. Niniejszy skrypt jest zapisem takiego wykładu z algebry w roku akademickim 2008–2009.